2015 ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Γ

1. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(e^{3-x}\cdot(x^2+1)) = \dfrac{e^2}{5}$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$, **για κάθε** $x > 0$.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt & , \text{αν } x > 0 \\ 2 & , \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Μονάδες 7

Λ Υ Σ Η

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

- $$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)' = \frac{e^x(x^2+1) - e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0.$$

  Επειδή $f'(x) \geq 0$ και $f'(x) = 0$ μόνο για $x = 1$, έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- $$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1} \overset{\frac{0}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2+1} = 0\cdot 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2+1} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2} = +\infty \end{array}\right\} \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Rightarrow} f(A) = (0, +\infty),$$

  οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

Γ2. έχουμε $f(e^{3-x}\cdot(x^2+1)) = \dfrac{e^2}{5} \overset{f(2)=\frac{e^2}{5}}{\Leftrightarrow} f(e^{3-x}\cdot(x^2+1)) = f(2) \overset{1-1}{\Leftrightarrow}$

$$e^{3-x}\cdot(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^3}{e^x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \frac{e^x}{x^2+1} = \frac{e^3}{2} \Leftrightarrow$$

$f(x) = \dfrac{e^3}{2} > 0$, επειδή $\dfrac{e^3}{2} \in (0, +\infty) = f(A)$ και $f\nearrow\mathbb{R}$ υπάρχει μοναδικό

x_0 ώστε $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$.

(ή $\frac{e^3}{2} \in (0, +\infty)$, η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f \nearrow \mathbb{R}$ άρα η f είναι 1-1

οπότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$)

Γ3. **1ος τρόπος**

Έχουμε ότι $0 < 2x < t < 4x \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(t) < f(4x) \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < \int_{2x}^{4x} f(4x)dt \Leftrightarrow$

$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x)\,[t]_{2x}^{4x} \Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$, για κάθε $x > 0$.

2ος τρόπος

Έστω $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ μια αρχική της f, με $F'(x) = f(x) > 0$, άρα $F \nearrow \mathbb{R}$.

- Η F είναι συνεχής στο $[2x, 4x] \subseteq (0, +\infty)$, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $(2x, 4x) \subseteq (0, +\infty)$ με $F'(x) = f(x) > 0$ (1)

Οπότε από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ ώστε:

$$F'(\xi) = \frac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} f(\xi) = \frac{1}{2x}\left(\int_0^{4x} f(t)dt - \int_0^{2x} f(t)dt\right) = \frac{1}{2x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt$$

Έχουμε ότι $0 < 2x < \xi < 4x \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(\xi) < f(4x) \Leftrightarrow \frac{1}{2x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt < f(4x) \overset{x>0}{\Leftrightarrow}$

$\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$, για κάθε $x > 0$.

Γ4. έχουμε

- Αν $x > 0$, η g είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
- Για $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(4x)\cdot 4 - f(2x)\cdot 2}{1} = 4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{4x}}{(4x)^2+1} - 2\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{2x}}{(2x)^2+1} =$$

$$4\lim_{x\to 0^+}\frac{e^0}{(0)^2+1} - 2\lim_{x\to 0^+}\frac{e^0}{(0)^2+1} = 4\cdot 1 - 2\cdot 1 = 2 = g(2)$$

Άρα η g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Τελικά η g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με
- $g'(x) = \left(\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right)' = -\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt + \frac{1}{x}\left(f(4x)\cdot 4 - f(2x)\cdot 2\right) =$

$$\frac{4xf(4x) - 2xf(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2} = \frac{2xf(4x) - 2xf(2x) + 2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2} > 0$$

- αφού $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt > 0$ από Γ3 και
- $0 < 2x < 4x \overset{f\nearrow\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} f(2x) < f(4x) \overset{2x>0}{\Leftrightarrow} 2x\cdot f(2x) < 2x\cdot f(4x) \Leftrightarrow$
  $2x\cdot f(4x) - 2x\cdot f(2x) > 0$

Επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και $g'(x) > 0$ με $x\in(0, +\infty)$ έχουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

2. **Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:**
   - **$f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και**
   - **$f(0) = 0$.**

Δ1. Να αποδείξετε ότι η $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt} - 1\right)\cdot \ln|f(x)|\right]$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\dfrac{1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt}{x-3} + \dfrac{8 - 3\int_0^x f^2(t)\,dt}{x-2} = 0$,

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 3)$.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Δ1. έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$:

- $f'(x)[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)} + f'(x)\cdot e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$
  $(e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$
- για $x = 0$ έχουμε
  $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = 2\cdot 0 + c \Leftrightarrow e^0 - e^{-0} = 0 + c \Leftrightarrow 1 - 1 = c \Leftrightarrow c = 0$

  επομένως $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \overset{\cdot(e^{f(x)})}{\Leftrightarrow} e^{2f(x)} - 1 = 2x\cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow$

$$e^{2f(x)} - 2x\cdot e^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow e^{2f(x)} - 2x\cdot e^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$(e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)} - x\right| = \sqrt{x^2+1} \quad \textbf{(1)}$$

- επειδή $\sqrt{x^2+1} \neq 0$, έχουμε ότι η $k(x) = e^{f(x)} - x \neq 0$, αφού η k είναι συνεχής διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$ και επειδή $k(0) = e^{f(0)} - 0 = 1 > 0$, έχουμε ότι $k(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

  οπότε **(1)** $\Rightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$

  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. α) η συνάρτηση f είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

- $f'(x) = (\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x + \sqrt{x^2+1})' =$

  $$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\,\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$$

- $f''(x) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}^2}(\sqrt{x^2+1})' = -\dfrac{1}{x^2+1}\,\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} =$

  $-\dfrac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, με $x^2 + 1 > 0$ και $\sqrt{x^2+1} > 0$ οπότε:

  - η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(-\infty, 0]$
  - η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$
  - Το $O(0, 0)$ είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f, αφού εκατέρωθεν του 0 αλλάζει η κυρτότητα και δέχεται εφαπτομένη σαν παραγωγίσιμη.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	–
f	$\cup$		$\cap$

Σ.Κ.

β) Παρατηρούμε ότι η εφαπτομένη της C_f της f στο $O(0, 0)$ είναι:

$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x$

- Επειδή η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $[0, +\infty)$, η εφαπτομένη της $y = x$ βρίσκεται πάνω από τη C_f με εξαίρεση το σημείο επαφής $O(0, 0)$, άρα έχουμε $f(x) \le y \Leftrightarrow f(x) \le x \Leftrightarrow x - f(x) \ge 0$, για κάθε $x \ge 0$.
- Η $x - f(x)$ είναι συνεχής, για κάθε $x \ge 0$, ως πράξεις συνεχών, οπότε:
- $E(\Omega) = \int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \int_0^1 (x - f(x))\,dx = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x'f(x)\,dx =$

  $$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 x\cdot f'(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

  $$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + \int_0^1 (\sqrt{x^2+1})'\,dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + [\sqrt{x^2+1}]_0^1 = \frac{1}{2} - 0 - 1\cdot f(1) + 0\cdot f(0) + \sqrt{2} - \sqrt{1} =$$

$$\frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = (\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}))\ \text{τ.μ.}$$

Άρα $E(\Omega) = (\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}))$ τ.μ. είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Δ3. από Δ2 α) έχουμε ότι: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f \nearrow \mathbb{R}$, άρα $x > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) = 0$, οπότε κοντά στο 0 έχουμε: $|f(x)| = f(x)$ **(2)**, με $x > 0$.

- Η συνάρτηση f' είναι συνεχής, άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = 1$ **(3)**.
- $$\lim_{x\to 0^+}\left[(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt} - 1)\cdot \ln|f(x)|\right] \overset{(2)}{=} \lim_{x\to 0^+}\left[(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt} - 1)\cdot \ln f(x)\right] =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt} - 1}{\frac{1}{\ln f(x)}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f^2(x)}{-\frac{1}{\ln^2 f(x)}\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}} = -\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)} f(x)\cdot \ln^2 f(x)\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f(x)}{f'(x)}(f(x)\cdot \ln f(x))^2\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f(x)}{f'(x)}\,(\lim_{x\to 0^+}(f(x)\cdot \ln f(x)))^2$$

$= 0\cdot 0^2 = 0$, αφού:

- $$\lim_{x\to 0^+}(f(x)\cdot \ln f(x)) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{f(x)}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}} = -\lim_{x\to 0^+} f(x) = -f(0) = 0$$
- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f(x)}{f'(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}{\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)} \overset{(3)}{=} \frac{e^0\cdot f(0)}{f'(0)} = \frac{1\cdot 0}{0} = 0$$

Δ4. Έστω η συνάρτηση

$$k(x) = (x-2)[1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt] + (x-3)[8 - 3\int_0^x f^2(t)\,dt],\ \text{με}\ x\in[2,3]$$

- Η συνάρτηση $k(x)$ είναι συνεχής στο $[2, 3]$ ως πράξεις συνεχών
  - από Δ2 β) έχουμε $f(x) \le x$ και από Δ3 $f(x) > 0$ με $x > 0$ **(4)**
- $k(2) = -[8 - 3\int_0^2 f^2(t)\,dt] = 3\int_0^2 f^2(t)\,dt - 8 < 0$, αφού
  - από **(4)** για $t\in[0, 2]$, έχουμε: $0 < f(t) \le t \Leftrightarrow f^2(t) \le t^2 \Leftrightarrow$

$t^2 - f^2(t) \geq 0$, η $t^2 - f^2(t)$, είναι συνεχής στο $[0, 2]$ και δεν είναι παντού μηδέν (μόνο για $t = 0$) οπότε:

$$\int_0^2 (t^2 - f^2(t))\,dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^2 t^2\,dt - \int_0^2 f^2(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 f^2(t)\,dt < \int_0^2 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)\,dt - 8 < 0$$

- $k(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)\,dt > 0$, αφού

  - από **(4)** για $t \in [0, 1]$, έχουμε: $0 < f(t) \leq t \overset{t \to t^2}{\Leftrightarrow} f(t^2) \leq t^2 \Leftrightarrow$ $t^2 - f(t^2) \geq 0$, η $t^2 - f(t^2)$, είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και δεν είναι παντού μηδέν (μόνο για $t = 0$) οπότε:

$$\int_0^1 (t^2 - f(t^2))\,dt > 0 \Leftrightarrow \int_0^1 t^2\,dt - \int_0^1 f(t^2)\,dt > 0 \Leftrightarrow$$

$$\int_0^1 f(t^2)\,dt < \int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - 3\int_0^1 f(t^2)\,dt > 0$$

- έχουμε $k(2) \cdot k(3) < 0$, άρα από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $k(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα x_0 στο $(2, 3)$, ισοδύναμα και η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt}{x - 3} + \frac{8 - 3\int_0^x f^2(t)\,dt}{x - 2} = 0,$$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2, 3)$.