2013 ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Γ

1. **Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη, τέτοιες ώστε:**

   - **$(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$**
   - **$f(0) = 1$ και**
   - **$g(x) = x^3 + \dfrac{3x^2}{2} - 1$**

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(g(x)) = 1$.

Μονάδες 8

Γ3 Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0.$$

Μονάδες 8

Λ Υ Σ Η

Γ1. Έχουμε $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

1ος τρόπος: $2(f(x) + x)(f'(x) + 1) = 2x \Leftrightarrow 2(f(x) + x)(f(x) + x)' = 2x \Leftrightarrow$

$((f(x) + x)^2)' = (x^2)' \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + c$

2ος τρόπος: $f(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) + x = x \Leftrightarrow 2f(x)f'(x) + 2[f(x) + xf'(x)] + 2x = 2x$

$(f^2(x))' + 2(xf(x))' + (x^2)' = (x^2)' \Leftrightarrow (f^2(x) + 2xf(x) + x^2)' = (x^2)' \Leftrightarrow$

$((f(x) + x)^2)' = (x^2)' \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + c$

- για $x = 0$ έχουμε $(f(0) + 0)^2 = 0^2 + c \Leftrightarrow c = 1$, άρα $(f(x) + x)^2 = x^2 + 1$

Επειδή $x^2 + 1 \neq 0$ έχουμε $f(x) + x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επομένως η $h(x) = f(x) + x \neq 0$ με $h(0) = 1 > 0$, διατηρεί πρόσημο και είναι συνεχής άρα $h(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(x) + x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$, $x \in \mathbb{R}$

Γ2. **1ος τρόπος:** $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \dfrac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

αφού $x - \sqrt{x^2+1} < 0 \Leftrightarrow x < \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow x^2 < x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 < 1$ ισχύει.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως «1 – 1».

- $f(g(x)) = 1 = f(0) \Leftrightarrow f(g(x)) = f(0) \overset{\text{"1–1"}}{\Leftrightarrow}$ **$g(x) = 0$**

2ος τρόπος: έχουμε $f(g(x)) = 1 \Leftrightarrow$

$$\sqrt{g^2(x)+1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x)+1} = g(x) + 1 \quad \textbf{(1)}$$

Πρέπει $g(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow$

$x \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

- η **(1)** γίνεται $g^2(x) + 1 = g^2(x) + 2g(x) + 1 \Leftrightarrow$ **$g(x) = 0$**

$g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 \Leftrightarrow$

$g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x + 1)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = -1$

x	**-∞**	**- 1**	**0**	**+∞**
g´(x)	+	–	+	
g(x)	↗	↘	↗	
		τ. μ. $g(-1) = -1/2$	τ. ε. $g(0) = -1$	

έχουμε:

$g(-1) = -\frac{1}{2} < 0$, $g(0) = -1 < 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

- στο $A_1 = (-\infty, -1]$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και

  $f(A_1) = (-\infty, -\frac{1}{2}]$, $0 \notin (-\infty, -\frac{1}{2}]$, άρα η g δεν έχει ρίζα στο A_1.

- στο $A_2 = [-1, 0]$, η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και

  $f(A_2) = [-\frac{1}{2}, -1]$, $0 \notin [-\frac{1}{2}, -1]$, άρα η g δεν έχει ρίζα στο A_2.

- στο $A_3 = [0, +\infty)$, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και

  $f(A_3) = (-1, +\infty)$, $0 \in (-1, +\infty)$, άρα η g έχει μοναδική θετική ρίζα στο A_3.

Επομένως και η $f(g(x)) = 1$ έχει μοναδική θετική ρίζα στο $[0, +\infty)$.

Γ3. $\int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$, $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

1ος τρόπος: Έστω η συνάρτηση $N(x) = \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt - f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$,

- Η $N(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (παραγωγίσιμη)

- $N\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^0 f(t)\,dt - f(0)\,\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} = -1 < 0$ και

  $N(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt - f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi 0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt > 0$

αφού $-\frac{\pi}{4} < t < 0 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) > f(t) > f(0) = 1 \Leftrightarrow f(t) > 1 > 0$, άρα $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt > 0$

Από Θ. Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $N(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0.$$

2ος τρόπος: έχουμε $f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x - \int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow$

$$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x + \int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu x\, f\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu x \int_{0}^{x-\frac{\pi}{4}} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \left(\eta\mu x \cdot \int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt\right)' = 0$$

Έστω η συνάρτηση $k(x) = \eta\mu x \cdot \int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt$

- Η $k(x)$ είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- Η $k(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ με

  $k'(x) = \ldots = f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x - \int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt$
- $k(0) = k\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$

Από Θ. Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $k'(x_0) = 0$

$$\Leftrightarrow \int_{x_0-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0.$$

ΘΕΜΑ Δ

2. **Έστω $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:**
   - **Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$**
   - **$f(1) = 1$**
   - $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

   Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}\,dt$, $x \in (1, +\infty)$ και $\alpha > 1$

   Να αποδείξετε ότι:

Δ1. **$f'(1)=0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).**

Μονάδες 6

Δ2. **η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$: $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\,du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\,du$ (μονάδες 6)**

Μονάδες 9

Δ3. **η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση**

$$(\alpha - 1)\int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}\,dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

Λ Υ Σ Η

Δ1. Είναι $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h} - \dfrac{f(1-h)-f(1)}{h}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1)}{h} - \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow$

$5\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h} + \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h} = 0 \Leftrightarrow 5f'(1) + f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$

Αφού

- $5\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h)-f(1)}{5h} \underset{u\to 0}{\overset{5h=u}{=}} 5\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(1+u)-f(1)}{u} = 5f'(1)$
- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h} \underset{u\to 0}{\overset{-h=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0} \dfrac{f(1+u)-f(1)}{u} = f'(1)$

Για $x > 1 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) = 0$

Για $0 < x < 1 \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) = 0$

Επομένως στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο το $f(1) = 1$.

x	0	1	$+\infty$
f′	−	0	+
f	↘		↗

ο. ε.
$f(1) = 1$

Δ2. Η $\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$, άρα η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη,

με $g'(x) = \dfrac{f(x)-1}{x-1} > 0,\ x > 1$

- αφού η f παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 = 1$ το $f(1) = 1$ έχουμε για κάθε $x > 1$, $f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) - 1 > 0$ ή

- $g'(x) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

  από ΘΜΤ για την f στο [1, x], x > 1, έχουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον

  $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

- Επειδή $1 < \xi < x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} 0 = f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(\xi) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} > 0$

Επομένως $g'(x) > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

- $\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\,du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\,du$,

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \int_x^{x+1} g(u)\,du$, $x > 1$

τότε $h(x) = \int_x^2 g(u)\,du + \int_2^{x+1} g(u)\,du = \int_2^{x+1} g(u)\,du - \int_2^x g(u)\,du$

- Έχουμε $h'(x) = g(x+1) - g(x) > 0$

  αφού $1 < x < x+1 \overset{g\nearrow}{\Rightarrow} g(x) < g(x+1)$

  άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$

- $\int_{8x^2+5}^{(8x^2+5)+1} g(u)\,du > \int_{2x^4+5}^{(2x^4+5)+1} g(u)\,du \Leftrightarrow g(8x^2+5) > g(2x^4+5)$

  (αφού $8x^2 + 5 > 1$ και

  $2x^4 + 5 > 1) \overset{g\nearrow}{\Rightarrow}$

  $8x^2 + 5 > 2x^4 + 5 \Leftrightarrow$

  $2x^4 - 8x^2 < 0 \Leftrightarrow$

  $2x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2)$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x^2	+	+	+	+	
$x^2 - 4$	+	–	–	+	
Γινόμενο	+	–	–	+	

Δ3. η g είναι κυρτή;

1ος τρόπος:

- Η $\dfrac{f(x)-1}{x-1} > 0$, $x > 1$, είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις

  παραγωγίσιμων και συνεχών συναρτήσεων με

  $g''(x) = \dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}$

Έστω η συνάρτηση f στο [1, x]

- Η f είναι συνεχής στο [1, x]
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο (1, x)

Εφαρμόζεται το ΘΜΤ για την f στο [1, x], x > 1, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

- Επειδή $1 < \xi < x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} 0 = f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow$

  $f'(x)(x-1) - (f(x) - f(1)) > 0$

Επομένως $g''(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ η g είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

2ος τρόπος:

- Έχουμε $g''(x) = \dfrac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)-1}{x-1}}{x-1} = \dfrac{f'(x)-\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{x-1}$

  Εφαρμόζεται το ΘΜΤ για την f στο $[1, x]$, $x > 1$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

  Επομένως $g''(x) = \dfrac{f'(x)-f'(\xi)}{x-1}$

- Επειδή $1 < \xi < x \overset{f'\nearrow}{\Rightarrow} 0 = f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \Leftrightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$

Επομένως $g''(x) > 0$ στο $(1, +\infty)$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $(1, +\infty)$ η g είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η εξίσωση $(\alpha - 1)\int_\alpha^x \dfrac{f(t)-1}{t-1}\,dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$, $x > 1$ έχει ακριβώς μια λύση.

1ος τρόπος:

- Η εφαπτομένη της C_g στο $x = \alpha$ έχει εξίσωση

  $y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \overset{g(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} y = g'(\alpha)(x - \alpha)$

Επειδή η g κυρτή στο $(1, +\infty)$ η $g(x) \geq y$ και το «=» ισχύει μόνο για $x = \alpha$

- Δηλαδή η εξίσωση $g(x) = g'(\alpha)(x - \alpha)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = \alpha$

Οπότε

$$\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}\,dt = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha) \Leftrightarrow (\alpha-1)\int_\alpha^x \frac{f(t)-1}{t-1}\,dt = (f(\alpha)-1)(x-\alpha),\ x > 1$$

2ος τρόπος:

- Η $(\alpha - 1)g(x) = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$ έχει προφανή ρίζα την $x = \alpha$.

Έστω ότι υπάρχει x με $x \neq \alpha$ ώστε $(\alpha - 1)g(x) = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{g(x)}{x-\alpha} = \dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \\ g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{g(x)}{x-\alpha} = g'(\alpha)$$

- Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, x]$ με $x > \alpha$ ή $[x, \alpha]$ με $1 < x < \alpha$
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α, x) ή (x, α)

Εφαρμόζεται το ΘΜΤ για την g στο $[1, x]$ ή $[x, \alpha]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, x)$ ή (x, α) τέτοιο ώστε $g'(\xi) = \dfrac{g(x)}{x-\alpha}$

Οπότε $g'(\xi) = g'(\alpha)$ άτοπο αφού g' είναι γνησίως αύξουσα, άρα το $x = \alpha$ είναι μοναδική ρίζα της g.

3ος τρόπος:

- Η ισότητα $(\alpha - 1)\int_{\alpha}^{x} \dfrac{f(t)-1}{t-1}\,dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha)$, $x > 1$ **(1)** επαληθεύεται για $x = \alpha$ και ισοδυνάμως γράφεται: $(\alpha - 1)g(x) = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha) \Leftrightarrow$

  $g(x) = \dfrac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x - \alpha) \Leftrightarrow g(x) = g'(\alpha)(x - \alpha)$ **(2)**

- Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(\alpha, g(\alpha))$ έχει εξίσωση

  (ε): $y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x - \alpha) \overset{g(\alpha)=0}{\Leftrightarrow} y = g'(\alpha)(x - \alpha)$

Οι ρίζες της **(2)** άρα και της **(1)** είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων της Cg και της **(ε)**. Επειδή η g είναι κυρτή, το μοναδικό κοινό σημείο της Cg και της **(ε)** είναι το M. Άρα η μοναδική λύση της εξίσωσης **(1)** είναι η $x = \alpha$.